自然現象と数学（工業化学）

工学研究科高分子化学専攻
堂寺知成

平成 21 年 10 月 21 日

はじめに

これからの３回の講義で、i の記号で表され

$$i \times i = -1$$

の性質をもつ虚数単位を使う数学を議論する。実数と虚数を合わせたものを複素数というが、高校では２次方程式、さらに進んで高次方程式の根として複素数が登場したはずである。

現代科学はミクロ世界の理解を基礎にしているが、諸君が今まさに習っているミクロ世界の自然法則である量子力学を記述するシュレディンガーの波動方程式は

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

である。基礎方程式に i があるではないか！大学入学以前は複素数など自然現象の理解に必要とは思っていなかったのではなかろうか。

複素数の数学は化学系に限らず、理工系学生が学ぶべき数理的方法、道具の１つである。特に振動、波動、回路、光学で頻繁に用いるし、それなしには計算ができないといってもよかろう。それゆえ、例えば光の波であるレーザーを学ぶ諸君が、複素数を知らないでは済まされない。振動、波動といっても、振り子、波の振動ばかりではなく、核スピンの回転、分子振動から始まって弦の振動、建築物の振動、地震波、そして光波、電磁波、電気信号も振動である。

さらに進んで、種々の学問の修得には、フーリエ解析の教養とフーリエ解析の応用は必須である。そこでは複素フーリエ変換が必要となってくる。化学実験の測定装置の背後にも複素フーリエ変換を使った動作原理がある。例えば有機あるいは無機合成された分子が何かを探るには、核磁気共鳴 (NMR: Nuclear Magnetic Resonance) 装置が用いられている。種々の分光装置、例えば、分子の回転、振動状態を調べるにはフーリエ変換赤外分光装置 (FT-IR: Fourier Transform InfraRed spectrometer) が用いられる。これらの原理の理解にはフーリエ変換の理解が欠かせない。２回生以降の授業でフーリエ変換はしっかり学習していただきたい。

また、一般に緩和現象では複素数を用いると計算がしやすくなることも述べておこう。例えば、電子スピン共鳴 (ESR: Electron Spin Resonance)、誘電緩和はその例である。他にも複素帯磁率、複素誘電率、複素粘性率など、物理量を複素数にまで拡張してそれぞれの物性が議論される。見かけは難しいが、複素数の基本に馴染んでいれば、そのうち自然に思えてくるから不思議である。

生体分子に興味ある諸君であってさえ、タンパク質の X 線構造解析の原理はフーリエ変換そのものであって、関係ないとは言っていられない。つまり物質構造の解析のためには、光、X 線、電

子、中性子などによる散乱実験が必要で、その実験データはフーリエ変換された世界で議論されるのである。そのようなわけで複素数は世界に溢れている。他の講義で当たり前のように出てくる複素数を、ここではじっくりと学習するのが目的である[1]。

学習のために多数の演習問題と過去の試験問題と解答を付けた。諸君の健闘を祈る。

目次

7 複素数登場

7.1 複素数を用いる理由：再び

複素数を用いるのはなぜだろうか。その答えは第一に計算手続きが簡明になるからである[2]。あらゆる物理的観測量は実数である。したがって、計算のためとはいえ、複素数を利用したときに意味があるのは、その実数部分である。この手続きを経てもなお計算が便利になる。今日からの 3 回

[1]理論系に進み、コーシーの定理など関数論（複素解析）で複素数の世界の数学の美しさとパワーに触れる学生諸君にはいうまでもない。

[2]諸君は三角関数が得意で、複素数を用いた計算に慣れていないからそうは思わないかもしれないが、大学レベルでの数学においてはもはや複素数でないと困るのである。

の講義で明らかになるが、複素数にすると、三角関数に比べて

１．表現が簡単化されること
２．簡単に計算できること →§8.3 §9.2
３．指数関数と統一的に扱えること →§9.4
４．時間に関する微分積分で形が変らないこと →§9.4

の利点がある。

前書きにも書いたように自然現象の多くの部分に波動、振動現象が関わっており、時間領域では周波数、空間領域では波数（波長の逆数）を媒介にして語られる。波は後で述べるように複素数で表すことが 1 から 4 に書いたように圧倒的に便利である。

それでは、自然科学では複素数は本当に計算の簡単さのためだけに存在するのだろうか。答えは、否である。原子・分子の世界を支配する物理法則を扱う量子力学では、複素数は本質的である。物質の状態を表現する波動関数は複素数であり、シュレディンガー方程式で代表される量子力学の自然法則は、複素数という数学的概念を確かに利用している。これが複素数を用いる第二の理由である。→§8.4

7.2 交流電源

■**質問 1**：100V の交流電源 2 つを直列につないだ。つないだ電源は何 V の交流電源になるか。

諸君も西日本と東日本が電源の周波数が違うことは知っているだろう。西日本は 60Hz で、東日本は 50Hz である。上の質問では同じ周波数の交流電源だと仮定しているが、解答は以下のどれか。

(1) 200V。 (2) 0V。 (3) わからない。

実はいずれも正解である。２つの交流電源が時間的に同じ振動をしていれば、強めあい 200V になるが、片方がプラスのとき片方がマイナスとなる場合、すなわち山と谷が真反対の振動をしていれば、足しあわせると打ち消し合って、あらゆる時間で 0V になる。一般に、時間的変化の異なる 2 つの 100V の交流電源の和は 0-200V の間のいずれかの交流になる。

■**波動**：図 1 のような波動の最小の繰り返し時間を周期といい T [s] で表す。振動数（周波数) (frequency） f [s^{-1}] と周期は

$$T = \frac{1}{f} \tag{1}$$

の関係がある。1 秒間に 1 回振動するときを振動数の単位とし、これを 1 ヘルツ (Hz) という。すなわち、ヘルツは 1 秒間に何回振動するかの回数である。

■**質問 2**：50Hz の交流電源の周期は何秒か？

■**波動の表現**：波動を式で表現すると

$$f(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{2}$$

となる。ここで A は振幅 (amplitude)、t は時間 (time)、ϕ は位相である。ω [s^{-1}] は角振動数[3]

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{3}$$

で定義される。振動数と角振動数は 2π だけ係数が違うので注意しなければならない。例えば 10Hz の角振動数は 62.8s^{-1} と計算される。時間に関する周期性の数学的表現は、あらゆる t について

$$f(t) = f(t+T) \tag{4}$$

[3] ω (オメガ) は時計ブランド名としても有名だから覚えやすい。時間 (**t**ime)t、周波数 (**f**requency)f など物理では変数は勝手に選ばれているのではない。世界中の人々が同じように t を時間として使用することが多いので、式を見た瞬間に時間とわかる。ϕ（ファイ）、大文字ファイ Φ、これと ψ（プサイ）、大文字プサイ Ψ は似ている。

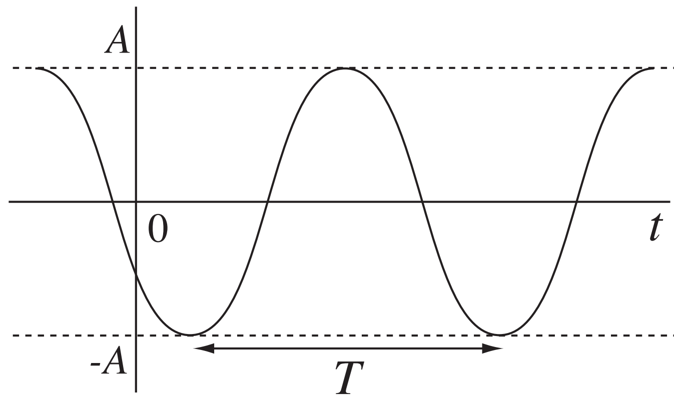

図 1: 周期 T、振幅 A の波動。

となることである。
■質問 1 の解答：最大電圧 V_1、位相最大電圧 V_2、位相 ϕ_2 を持つ電圧を直列につなぐと

$$V(t) = V_1 \cos(\omega t + \phi_1) + V_2 \cos(\omega t + \phi_2) \tag{5}$$

を計算する。V_1 と V_2 が等しい場合は簡単で

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \tag{6}$$

を利用すると

$$V(t) = 2V_1 \cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \tag{7}$$

がわかる。位相差によって振幅が

$$V_{\max} = 2V_1 \left|\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right| \tag{8}$$

となる。位相差がなければ 200V であり、π なら 0V となるのがわかる。しかし、V_1 と V_2 が異なると計算は厄介である。その答えは§8.3 で述べることにしよう。
■波の干渉：位相差が最終結果に重要であるということはヤングの実験、すなわち二重スリットを通った光波の干渉の問題でも全く同じである。高校時代に学習した波の強め合いと弱め合いの原理であって、それぞれのスリットを通った 2 つの波の位相差が問題となってくる。平行して学習しているように、量子力学によれば電子も波として振る舞うが、外村彰の二重スリットの実験 (1989) では電子も同じように干渉縞を作ることが確かめられている。一粒の電子といえども、波動、すなわち干渉縞の法則にしたがっているのである[4]。

7.3 複素数の演算規則

■ **2 次方程式の解**：$x^2 + 1 = 0$ の解は形式的に $\sqrt{-1}$ であり、これをオイラーは i と書いた。これを虚数単位という。虚数 x は y を実数として $x = iy$ の形にかける。虚数の乗法は代数的に $i^2 = -1$ を規則として計算すればよい。

[4] http://www.hqrd.hitachi.co.jp/rd/doubleslit.cfm

■レオンハルト・オイラー (1707-1790)：18 世紀の数学者、物理学者。解析学、数論、代数学、力学、流体力学、天文学、トポロジー、組み合わせ論など様々な分野で業績を残した。π、e、$\sum$、log、sin、cos なの記号を発明したことでも知られる。

■複素数：複素数 z は x、y を実数として

$$z = x + iy \tag{9}$$

の形にかける。x を実数部分（実部）$\mathrm{Re}(z)$、y を虚数部分（虚部）$\mathrm{Im}(z)$ という。

２次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{10}$$

の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{11}$$

である。判別式 $b^2 - 4ac$ が負のとき複素数の解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\ i}{2a} \tag{12}$$

を得る。

■例題：

$$x^3 - 1 = 0 \tag{13}$$

の解をもとめよ。

解答：因数分解すると

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \tag{14}$$

だが、２次方程式の解の公式を用いると、解は $x = 1$ の他に

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\ i}{2} \tag{15}$$

となることを 1751 年オイラーは気づいた。これらは 1 の三乗根である。

■演算規則：

$$(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y) \tag{16}$$

$$(a + ib) - (x + iy) = (a - x) + i(b - y) \tag{17}$$

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx) \tag{18}$$

■複素共役：虚部の符号を変えたもの

$$(x + iy)^* = x - iy \tag{19}$$

$$(x - iy)^* = x + iy \tag{20}$$

を複素共役といい、スター*をつけて表す。複素共役の複素共役は元に戻る:

$$(z^*)^* = z \tag{21}$$

実部と虚部は

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+z^*}{2} \tag{22}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z-z^*}{2i} \tag{23}$$

と表される。

■例題：$(zw)^* = z^*w^*$ を示せ。

■絶対値：

$$|z|^2 = zz^* = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 \tag{24}$$

$\sqrt{x^2+y^2}$ を z の絶対値といい、$|z|$ で表す。

■商：

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{z^*}{|z|^2} \tag{25}$$

$$\frac{a+ib}{x+iy} = \frac{(a+ib)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{(ax+by)+i(bx-ay)}{x^2+y^2} \tag{26}$$

7.4 複素数の座標表示

$$z = x+iy \tag{27}$$

で表される複素数を 2 次元直交座標 (x,y) で表示する。これを直交座標表示という。このとき 2 次元平面を複素平面またはアルガンド図といい、x 軸を実軸、y 軸を虚軸という。

複素数の加減についてはベクトルの演算と同じであって、例えば $z=x+iy$ と $w=a+ib$ の和 $z+w$ は

$$(x,y)+(a,b) = (x+a, y+b) \tag{28}$$

で計算される。

乗法は直交座標表示ではよくわからないが、複素数の演算規則にしたがい

$$wz = (a,b)\underline{\times}(x,y) = (ax-by, bx+ay) \tag{29}$$

となる。

図 2 のように原点から座標 (x,y) まで直線を引き、その直線の長さを r、直線と正の実軸とのなす角度を θ とすれば

$$x = r\cos\theta \tag{30}$$

$$y = r\sin\theta \tag{31}$$

である。このとき (r,θ) を極座標といい

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{32}$$

を複素数の極座標表示という。r を z の絶対値、θ を偏角という。

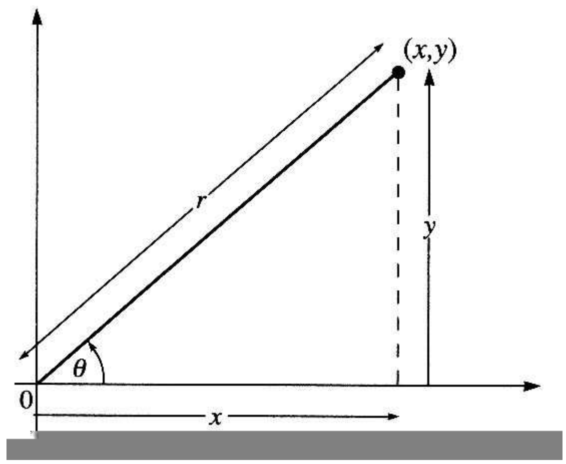

図 2: 極座標 (r, θ)。

直交座標表示 (x, y) から極座標 (r, θ) は

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{33}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{34}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{35}$$

で計算できる。
■複素数の乗算：極座標表示の利点は複素数の乗算である。

$$z \quad = \quad x + iy: \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{36}$$
$$w \quad = \quad a + ib: \quad a = R\cos\phi, \quad b = R\sin\phi \tag{37}$$

について、wz の実部は

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(wz) &= ax - by = R\cos\phi \times r\cos\theta - R\sin\phi \times r\sin\theta \\ &= Rr(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) \\ &= Rr\cos(\theta + \phi) \end{aligned}$$

虚部は

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(wz) &= ay + bx = R\cos\phi \times r\sin\theta + R\sin\phi \times r\cos\theta \\ &= Rr(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\ &= Rr\sin(\theta + \phi) \end{aligned}$$

と計算される。したがって、極座標表示の複素数の乗算について次の公式が成り立つ。

$$R(\cos\phi + i\sin\phi) \times r(\cos\theta + i\sin\theta) = Rr[\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)] \tag{38}$$

つまり、原点からの距離はその大きさの乗算となり、偏角は足し合わせればよい。図 3 に例を示す。

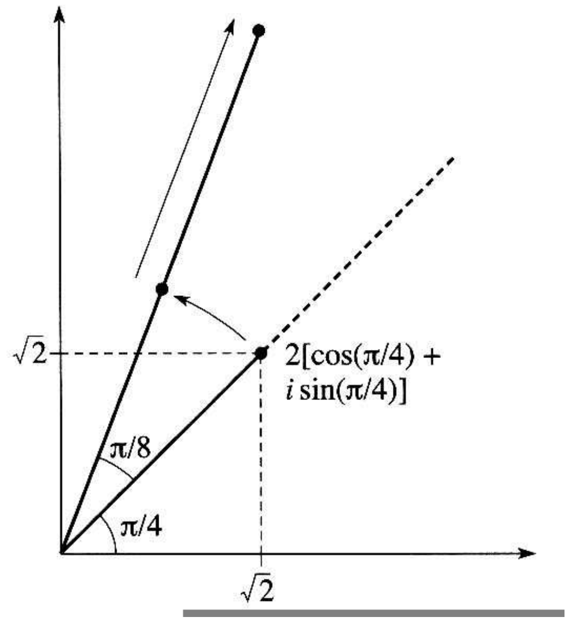

図 3: 複素数の乗算。$2[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] \times 2[\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)]$。

7.5 演習問題

■**問題 7.1**：以下の数を $x + iy$ の形で表せ。

$$(1)\ \frac{2+i}{3-4i}, \quad (2)\ \frac{1-i}{6+8i}, \quad (3)\ \frac{3+i}{(2+i)(1-i)}$$

■**問題 7.2**：$zw^* + z^*w$ が実数であることを示せ。

■**問題 7.3**：$w = 3 + 2i$、$wz = 1$ のとき、z を $z = x + iy$ の形で表せ。

■**問題 7.4**

$$z = (2 + 3i)^2 - |3 + 4i| + 2 - 6i \tag{39}$$

の実部 $\mathrm{Re}(z)$、虚部 $\mathrm{Im}(z)$、複素共役 z^*、絶対値 $|z|$ を求めよ。

■**問題 7.5**

$$\frac{1}{3+i} + \frac{2-i}{i + \frac{3}{1+i}} \tag{40}$$

を $x + iy$ の形で表せ。

■**問題 7.6**：以下の数を複素平面に図示せよ。

$$(1)\ \frac{1}{1+i}, \quad (2)\ \frac{1}{1-i}, \quad (3)\ \frac{1}{-1+i}, \quad (4)\ \frac{1}{-1-i}$$

■**問題 7.7**：次の複素数の偏角の主値 θ を求めよ。ここで主値とは $-\pi < \theta \leq \pi$ なる条件を満たす偏角である。

$$(1)\ -1 + \sqrt{3}i, \quad (2)\ 1 - \sqrt{3}i \quad 、(3)\ \sqrt{3} + i$$

■**発展問題 7.8**：16 世紀中盤にジロラモ・カルダーノは一般的な 3 次方程式

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{41}$$

は、$z = x - a/3$ とおくことで簡約 3 次方程式

$$x^3 = mx + n \tag{42}$$

に帰着できることを導いた。ところでこの簡約 3 次方程式の根は

$$x = \left(\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{43}$$

で与えられ、これをカルダーノの公式という。
（1）形式的に $x^3 = 6x + 9$ に公式を適用し根を（1つ）求めよ。
（2）以下にオイラーの簡潔な方法でカルダーノの公式を確かめよう。

$$x = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}} \tag{44}$$

が簡約 3 次方程式を満たすことを示せ。
（3）（2）の結果を用いて $p + q$ と $p - q$ を m と n で表せ。当初カルダーノの公式で 3 次方程式の解の公式が得られたと考えたが、虚数を知らない当時にあって $x^3 = 6x + 4$ では公式のに適用に不都合が生ずる。このことは解決したのはオイラーである。続きは発展問題 9.9 に譲る。

8　オイラーの公式と自然現象への複素数の応用計算

8.1　オイラーの公式

テイラー展開で学んだように指数関数[5] と三角関数は、$x = 0$ で次のように級数展開される。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{45}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{46}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{47}$$

式 (45) を複素数にまで拡張して、複素数 z の指数関数を

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{48}$$

で定義する。特に純虚数 $z = i\theta$ (θ は実数) のとき

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \tag{49}$$

[5] e^x は $\exp(x)$ とも書く。x のところに長い式が入るときは後者を使った方が見やすい。

を $i^2=-1$ を使って簡単化すると

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = 1+\frac{i\theta}{1!}-\frac{\theta^2}{2!}-\frac{i\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\frac{i\theta^5}{5!}+\cdots \tag{50}$$

$$= \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right) \tag{51}$$

を得る。これよりオイラーの公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{52}$$

が示された。

■三角関数の複素数による表現：オイラーの公式の θ に $-\theta$ を代入して、$\cos(-\theta)=\cos\theta$、$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \tag{53}$$

を得るが、(52) とあわせて重要な関係

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \tag{54}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \tag{55}$$

を得る。

■複素数の指数表示：

$$z=re^{i\theta} \tag{56}$$

■複素共役：オイラーの公式から複素共役は

$$z^*=re^{-i\theta} \tag{57}$$

で与えられる。

■複素数の逆数：

$$z^{-1}=\frac{e^{-i\theta}}{r}=\frac{re^{-i\theta}}{r^2}=\frac{z^*}{|z|^2} \tag{58}$$

8.2 博士の愛した数式

監督小泉堯史、主演寺尾聰、深津絵里、原作小川洋子の映画をご存知であろうか。とても清々しい思いを味わうことができる深く心に染み入る映画である。ちょっと感動的なので機会があったらご覧いただきたい。この映画では、オイラーの公式に π を代入した

$$e^{i\pi}+1=0 \tag{59}$$

の式が、原作ではなかった重要な役割をもって登場する。この式には、数学上のスーパースターともいうべき加法の単位元 0、乗法の単位元 1、円周率 π、自然対数の基底 e、虚数単位 i の 5 つの数が登場し、単純な式で結ばれている。これは驚くべきことである。ここでは映画で登場する吉岡秀隆演ずる $\sqrt{}$（ルート）とよばれる若い数学の先生の言葉を記してみよう。

「π は円周率、わかるよね、i も-1 の平方根で虚数。宇宙の果てまでも続いていく数 π と、決して正体を現さないイマジナリーナンバー i。厄介なのは e です。この e はね、イギリスの数学者、ジョン・ネピアにちなんでネピア数と呼ばれています……（中略）ネピア数は数学では最も重要な定数の 1 つとなっています。」

「無限の宇宙からね、π が e のもとに舞い降ります。ヒュー……。そして恥ずかしがり屋のこの i と握手する。彼等は身を寄せあって、じっと息をひそめています。e も i も π も決して繋がらない。でもね一人の人間がたったひとつだけ足し算をすると、世界は換わります。矛盾するものが統一され、0 つまり、無に抱きとめられます。」

数学のひとつひとつ式、定数、現象、公式の裏側に無限の広がりをもった空間があるということを感じさせる吉岡秀隆のすばらしい演技でありました。

8.3 電気回路に現れる複素数

■複素交流電圧：電圧 $V_1\cos(\omega t+\phi_1)$ は複素数 $V_1 e^{i(\omega t+\phi_1)}$ の実部である。$V_1 e^{i(\omega t+\phi_1)}$ を複素交流電圧といい、$\tilde{V_1}=V_1 e^{i\phi_1}$ を複素振幅という。電流も同様に表し、これらを交流の複素数表示という。

２つの交流電圧の和

$$V(t)=V_1 e^{i(\omega t+\phi_1)}+V_2 e^{i(\omega t+\phi_2)}=V_3 e^{i(\omega t+\phi_3)} \tag{60}$$

を複素数の利用して計算しよう。

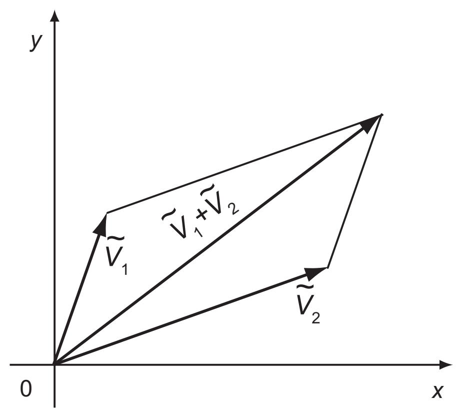

図 4: 複素交流電圧の和。

■複素数の和：一般に複素数の和は

$$ae^{i\alpha}+be^{i\beta}=ce^{i\gamma} \tag{61}$$

の形にかける[6]。求める複素数の絶対値は

$$\begin{aligned} c^2 &= (ce^{i\gamma})(ce^{-i\gamma})=(ae^{i\alpha}+be^{i\beta})(ae^{-i\alpha}+be^{-i\beta}) \\ &= a^2+b^2+ab[e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}] \\ &= a^2+b^2+2ab\cos(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

[6] α（アルファ）、β（ベータ）、γ（ガンマ）は三つ組みとして覚えられる

から

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)} \tag{62}$$

となる。

図形的に考えれば、答えは容易に理解できる。複素数の和は、複素平面のベクトル和、平行四辺形の定理を用いて表せる。$C = \pi - (\alpha - \beta)$ と置けば、上の結果が余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{63}$$

に他ならないことがわかるだろう。γ は

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{c} \quad \sin\gamma = \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{c} \\ \tan\gamma &= \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{a\cos\alpha + b\cos\beta} \end{aligned}$$

から求まる。

電圧の和の計算には $e^{i\omega t}$ 以外の複素振幅の部分に、上の結果を利用すればよい（図 9）。特に振幅は

$$V_3 = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\phi_1 - \phi_2)} \tag{64}$$

と計算される。

このように２つの電圧の振幅が異なっても複素数の利用で形式的に計算できる。電気工学では、複素交流電圧や複素交流電流が用いられるのは、この理由があるからである[7]。もう少し、交流回路理論の応用を述べるが、詳しい電気の理論は電磁気学で学ぶこととして、ここではわからなくても気にする必要はない。複素数計算の応用例として学習してほしい。

■複素インピーダンス：交流では一般に電流と電圧の位相が異なるので、簡単なオームの法則 $R = V/I$ が成立しない。抵抗 R の代わりに複素インピーダンスまたは単にインピーダンス Z:

$$Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} \tag{65}$$

を定義する。単位は Ω である。

■合成インピーダンス：インピーダンス Z_1 と Z_2 を直列につないだときの合成インピーダンス Z は

$$Z = Z_1 + Z_2 \tag{66}$$

である[8]。一方、並列につないだときの合成インピーダンス Z は

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \tag{67}$$

から求める[9]。

■コイルのインピーダンス：インダクタンス（自己誘導係数）が L のコイルには

$$V = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{68}$$

[7]電気工学では、電流に i を用いるので、i の代わりに j を虚数単位として用いる。電気工学では $e^{j\omega t}$、物理学では $e^{-i\omega t}$ と符号まで違ったり、前者では超電導、後者では超伝導と違って書くなど文化の違いがある。

[8]直列では電流は同じであり、$\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2$、および $z_1 = \tilde{V}_1/\tilde{I}$、$z_2 = \tilde{V}_2/\tilde{I}$ から計算できる。

[9]並列では電圧は同じであり、$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2$、および $z_1 = \tilde{V}/\tilde{I}_1$、$z_2 = \tilde{V}/\tilde{I}_2$ から計算できる。

の関係がある。$V = \tilde{V}e^{i\omega t}$、$I = \tilde{I}e^{i\omega t}$ とすれば

$$\tilde{V} = i\omega L\tilde{I} \tag{69}$$

が成り立つので、コイルのインピーダンスは

$$Z = i\omega L \tag{70}$$

と書ける。

■コンデンサのインピーダンス：キャパシタンス（電気容量）が C のコンデンサには

$$I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{71}$$

の関係がある。$V = \tilde{V}e^{i\omega t}$、$I = \tilde{I}e^{i\omega t}$ とすれば

$$\tilde{I} = i\omega C\tilde{V} \tag{72}$$

が成り立つので、コンデンサのインピーダンスは

$$Z = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \tag{73}$$

と書ける。

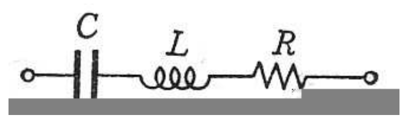

図 5: 直列回路。

■直列回路：抵抗 (R)、コイル (L)、コンデンサー (C) の直列回路の合成インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z &= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= R + i\omega L\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \end{aligned}$$

で与えられる。電流の実効値は

$$|\tilde{I}| = \left|\frac{\tilde{V}}{Z}\right| = \frac{|\tilde{V}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{74}$$

で表される。ここで

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{75}$$

を定義する。$\omega = \omega_0$ のとき直列共振といい、インピーダンスは最小値 R となり、したがって電流値は最大となる。

8.4　スピンはめぐる

■スピン：電子あるいは陽子や中性子は「スピン」という小さな磁石としてふるまう不思議な角運動量の自由度を持っている。例えばナトリウムの D 線は 5895.92 Å と 5889.95 Å に分裂するが、これは量子力学の軌道角運動量では説明できないもので、スピン量子数によるスペクトルの分裂（異常ゼーマン効果）が原因である（そもそものスピンの起源はディラックの相対論的電子論で与えられている。）。また、磁性を与えるのは電子スピンである。すなわち、物質の中で磁性を担う電子スピンが同じ方向を向けば磁石（や有機磁性体）になる。有機合成分子の同定、構造決定のために用いる NMR(核磁気共鳴：Nuclear Magnetic Resonance) では、核スピンの回転運動を調べている。医学での応用が著しい MRI(核磁気共鳴画像法：Magnetic Resonance Imaging) は、NMR を利用している。このような現象に現れるスピンを記述する方程式には、いつでも複素数が出てくる。
■スピンの数学的表現：ここではスピンの代数が複素数で与えられることをみよう。スピンはパウリ行列[10]

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{76}$$

を用いて

$$\boldsymbol{S}^x = \frac{1}{2}\sigma^x, \quad S^y = \frac{1}{2}\sigma^y, \quad S^z = \frac{1}{2}\sigma^z \tag{77}$$

で表され、大きさ 1/2 の角運動量あるいは磁気モーメントとしてふるまう。
■交換子：実数と異なり、行列の場合、一般に交換しないのが特徴である。物理学では交換子 (commutator) を

$$[A, B] \equiv AB - BA \tag{78}$$

で定義する。定義から

$$[A, A] = 0, \quad [A, B] = -[B, A] \tag{79}$$

がわかる。
■スピン演算子の交換関係：スピンは

$$[S^x, S^y] = iS^z, \quad [S^y, S^z] = iS^x, \quad [S^z, S^x] = iS^y \tag{80}$$

の交換関係を満たすことが確かめられる。このページの内容はわからなくても、巡回置換 $x \to y \to z \to x$ の対称性が成り立つ複素数を含んだ式を美しいとは思いませんか？[11]
■アップとダウン：z 方向の上向きスピンは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、下向きスピンは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のベクトルで表現され

$$S^z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S^z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{81}$$

の式（固有値方程式）を満たす。これはスピン演算子が 1/2 と-1/2 の固有値（物理量）を持つことを意味している。

[10] σ（シグマ）は Σ の小文字。
[11] 京大卒・朝永振一郎の著書「スピンはめぐる」。

8.5 演習問題

■問題 **8.1**：複素平面を用いて、$z = 4 + 8i$ と $w = 15 - 12i$ の和 $z + w$ を求めよ。

■問題 **8.2**：$e^{in\pi/8}$、$n = 0, 1, 2, ..., 15$ を複素平面で図示せよ。

■問題 **8.3**：次の複素数を指数表示で表せ。(1)$\sqrt{2}(1 + i)$、(2)$3(1 + i\sqrt{3})$、(3)$2(\sqrt{3} + i)$。

■問題 **8.4**：zw を指数表示で表せ。

(1) $z = 2e^{i\pi/4} \quad w = 2e^{i\pi/4}$

(2) $z = 3e^{i\pi} \quad w = 2e^{i\pi/4}$

(3) $z = 2e^{i\pi/16} \quad w = \frac{1}{2}e^{-i\pi/16}$

■問題 **8.5**：z/w を指数表示で表せ。

(1) $z = 2e^{i\pi/4} \quad w = 4e^{-i\pi/8}$

(2) $z = 3e^{i\pi/4} \quad w = 2e^{i\pi/2}$

(3) $z = 2e^{-i\pi/16} \quad w = 2e^{i\pi/16}$

■問題 **8.6**：$e^{i\pi} - e^{i\pi/2}$ を指数表示せよ。

■問題 **8.7**：指数表示を用いて、いかなる複素数 z_1、z_2 に対しても

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \tag{82}$$

となることを示せ。ヒント：式 (62) を用いよ。

■問題 **8.8**：$z = 2e^{i\pi/3}$ のとき、z^2、z^3 を求め、z、z^2、z^3 を複素平面上に図示せよ。

■問題 **8.9**：$(1 + \sqrt{3}i)^3$ を求めることにより、$(1 + \sqrt{3}i)^{10}$ を計算せよ。

■問題 **8.10**：図 6 の合成インピーダンス Z、$\mathrm{Re}(Z)$、$\mathrm{Im}(Z)$ を計算せよ。次に $R_1 = 1.5$、$R_2 = 2.5$、$\omega L = 1.0$、$\omega C = 2.0$ として求めてみよ。

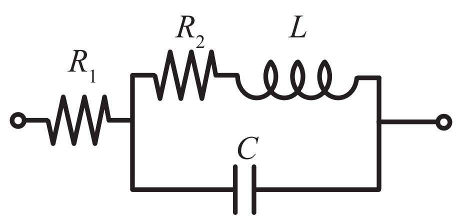

図 6: 演習問題 8.10。

■問題 **8.11**：スピン演算子の交換関係 (80) を確かめよ。

$$[S^x, S^y] = iS^z, \quad [S^y, S^z] = iS^x, \quad [S^z, S^x] = iS^y$$

9　ド・モアブルの定理と自然現象への複素数の応用計算

9.1　ド・モアブルの定理

極座標での積の性質を利用して

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1] \\ z_2 &= r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2] \\ &\cdots \\ z_n &= r_n[\cos\theta_n + i\sin\theta_n] \end{aligned}$$

これらの積は次々に計算できて、結局

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_n &= r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \\ &+ i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \end{aligned}$$

となる。$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 1$ および $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ とすると、ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{83}$$

を得る。

9.2　三角関数の加法定理

$z = e^{i\theta}$ のとき

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \tag{84}$$

$$\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta \tag{85}$$

である。これから

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \tag{86}$$

$$z - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta \tag{87}$$

を得る。さらにド・モアブルの定理より

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{88}$$

$$\frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta \tag{89}$$

であるから

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \tag{90}$$

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \tag{91}$$

を得る。

これから三角関数の加法定理を簡単に計算することができる。例えば

$$2^2\cos^2\theta = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 = z^2+2+\frac{1}{z^2} = 2\cos(2\theta)+2 \tag{92}$$

より

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \tag{93}$$

となる。これは簡単な例である。3 乗、4 乗も同様である[12]。 5 乗の計算は

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

を考えて

$$\begin{aligned}
\sin^5\theta &= \frac{1}{(2i)^5}\left(z-\frac{1}{z}\right)^5 \\
&= -\frac{i}{32}\left[\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)-5\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+10\left(z-\frac{1}{z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{16}[\sin(5\theta)-5\sin(3\theta)+10\sin\theta]
\end{aligned} \tag{94}$$

のように計算される。

研究現場では三角関数の加法定理をいちいち導かない。公式集を見ることになる。加法定理の導出はそれ自体重要だが、複素数の利用で計算の大変さが軽減されることの例となっていることを理解しよう。

9.3 ベキ乗根

■ 1 のベキ乗根

$$z^n-1=0 \tag{95}$$

のとき、k を整数として 1 のベキ乗根は

$$z=\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \tag{96}$$

となることは、ド・モアブルの定理より

$$z^n=\cos(2\pi k)+i\sin(2\pi k)=1 \tag{97}$$

となって明らかである。ここで三角関数には $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$、$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$ の性質があるので、異なる k として

$$k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{98}$$

がとれる。図形的には単位円上の 1 を含む単位円の n 等分した点が 1 の n 乗根（ベキ乗根）である。n 回回転して 1 に戻るからである。

[12] 2 項定理（パスカルの三角形）

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots\cdots & & & & &
\end{array}$$

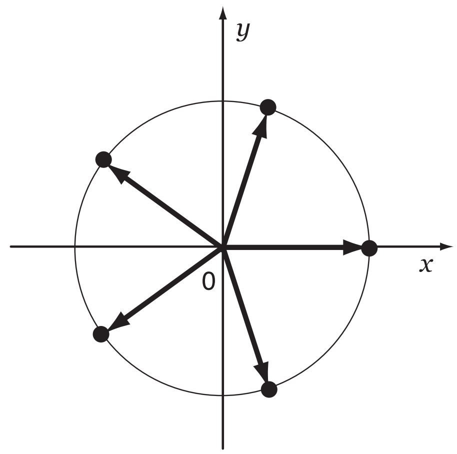

図 7: 1 の 5 乗根。

■複素数のベキ乗根：同様にして

$$z = a + bi = re^{i\theta}, \quad -\pi < \theta \leq \pi \tag{99}$$

のベキ乗根は

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \right] \\ k &= 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{aligned} \tag{100}$$

と求まる。

9.4　振動運動に現れる複素数

■単振動の方程式：のび x に比例する復元力が働くバネにはフックの法則により力

$$F = -kx \tag{101}$$

が働く[13]。

ニュートンの第二法則

$$F = ma = m\ddot{x} \left(= m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \right) \tag{102}$$

とあわせて

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{103}$$

の方程式を得る。ここで

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{104}$$

[13] バネの振動は、ミクロの分子振動から光子（フォトン）にはじまって、マクロの建築物から地震にいたるまで、すべての振動の基本である。振動、波動だけきちんと学べば、大学の学問は尽きたといっても良いほどでの重要な問題なのである。

は角振動数である。

解として $x(t)=e^{zt}$ を代入して

$$Az^2e^{zt}+\omega^2Ae^{zt}=Ae^{zt}(z^2+\omega^2)=0 \tag{105}$$

を得る。最終的に解くべき方程式は

$$z^2+\omega^2=0 \tag{106}$$

である。これを解いて

$$z_{\pm}=\pm i\omega \tag{107}$$

であるから、解として、もちろん

$$x(t)=Ce^{i\omega t}+De^{-i\omega t} \tag{108}$$

と書いてもよいが、実数解としてわかりやすいのは

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} \tag{109}$$

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} \tag{110}$$

である。2 階微分方程式だから、一般解は 2 つの解の重ね合わせ（線形結合）

$$x(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t \tag{111}$$

で表現される。

■抵抗のある運動：抵抗のある運動の特徴を調べるために，最も単純なモデルとして速度に比例する抵抗

$$F=-\gamma mv, \quad (\gamma>0) \tag{112}$$

がある場合を考えよう。運動方程式は

$$\ddot{x}=\dot{v}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\gamma v \tag{113}$$

と表される。変数分離（第 5 回授業）して $\mathrm{d}v/v=-\gamma\mathrm{d}t$ と変形し、両辺を積分すると

$$\ln v=-\gamma t+c \tag{114}$$

を得る．ここで c は積分定数である。ゆえに初速度を v_0 として

$$v=\exp(-\gamma t+c)=\exp(c)\exp(-\gamma t)=v_0\exp(-\gamma t) \tag{115}$$

と書ける。さらに積分すると

$$x=\frac{v_0}{\gamma}\left[1-\exp(-\gamma t)\right]+x_0 \tag{116}$$

となる。初期値 x_0 が見やすいように $t=0$ としたとき括弧の中が消えるように書いた。

$t=0$ から $t=\infty$ の間に移動する距離を制動距離とよぶとすると、(116) から制動距離は v_0/γ とわかる。したがって、例えば自転車が 5m/s で走行中こぐのを止めたとき、$\dot{v}=-0.1v$ の割合で減速すると仮定すると、制動距離は 50m と計算される。

■減衰振動の方程式：ω_0 で振動するバネに，速度に比例する抵抗力 $F=-\gamma m v$ が働くとすれば

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \tag{117}$$

の方程式[14] を得る。解として $x(t)=Ae^{zt}$ を代入して

$$Az^2e^{zt}+A\gamma z e^{zt}+\omega_0^2Ae^{zt}=Ae^{zt}(z^2+\gamma z+\omega_0^2)=0 \tag{119}$$

を得る。

　最終的に解くべき方程式は

$$z^2+\gamma z+\omega_0^2=0 \tag{120}$$

である。抵抗が小さい場合、すなわち判別式が負 $(\omega_0^2-\gamma^2/4>0)$ の場合を考える。そのとき

$$\begin{aligned} z &= -\frac{\gamma}{2}\pm\left(\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}\right)i && (121)\\ &= -\frac{\gamma}{2}\pm\omega i && (122)\end{aligned}$$

を得る。実数部分は減衰、虚数部分は角振動数 $\omega=(\omega_0^2-\gamma^2/4)^{1/2}$ の振動を表している。解は

$$x(t)=\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\exp(\pm\imath\omega t) \tag{123}$$

であり、複素数を使うと減衰と振動が一度に扱える利点がある。実数解としては

$$x(t)=\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)(A\sin\omega t+B\cos\omega t) \tag{124}$$

の形となる。すなわち、抵抗の小さいバネの運動は、振動が抵抗によって徐々に減衰してゆく。

9.5　演習問題

■**問題 9.1**：$1+i$ の平方根の 1 つが $2^{1/4}[\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8)]$ であることを示せ。

■**問題 9.2**：ド・モアブルの定理を応用して、以下の式を示せ。

$$\cos^3\theta=\frac{\cos(3\theta)+3\cos\theta}{4},\quad \sin^3\theta=\frac{3\sin\theta-\sin(3\theta)}{4} \tag{125}$$

■**問題 9.3**：$\sin^7\theta$ を θ の倍数の三角関数で表現せよ。

■**問題 9.4**：$2+2i$ の 3 乗根をすべて求めよ。

■**問題 9.5**：$z^6-1=0$ のすべての根を求め、複素平面上に点を図示せよ。

■**問題 9.6**：(111) の A,B を (108) の C,D で表せ。

■**発展問題 9.7**：$a=0.1$ kg、$b=0.2$ kgs^{-1}、$c=1.0$ kg s^{-2} のとき微分方程式

$$a\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+cx=0 \tag{126}$$

の一般解を求め、初期条件 $t=0$ で $x=0$ m、$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0.3$ ms^{-1} のときの図を描いてみよ。

[14] この方程式は直列につなげたコイルとコンデンサと抵抗の端点を結んだ電気回路でも現れる。電流を I とすると、方程式は

$$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{C}=0 \tag{118}$$

で表され、方程式の数学的性質は同じである。

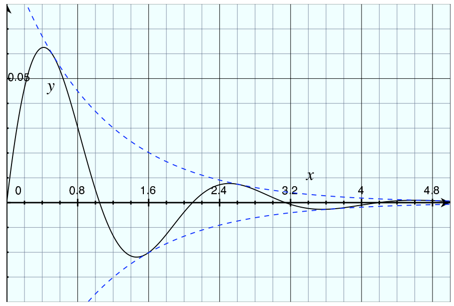

図 8: 問題の解答。$x(t) = 0.1\exp(-1.0t)\sin(3.0t)$（実線）および $x(t) = \pm 0.1\exp(-1.0t)$（破線）。

■**発展問題 9.8**：γ の大きい場合のバネの振動の一般解を求めよ[15]。この場合、抵抗が慣性を上回り、振動が起きない。これを過減衰という。

■**発展問題 9.9**：$x^3 = 6x + 4$ にカルダーノの公式 (43) を適用せよ。発展問題 7.8 の p、q の 3 乗根を正しく求めることにより、$x^3 = 6x + 4$ の 3 根を求めてみよ。

参考文献

[1] M. Tinker and R. Lambourne, *Further Mathematics for the Physical Sciences* (John Wiley & Sons, 2000). 講義の教科書.

[2] ダンハム著、黒川他訳、「オイラー入門」(シュプリンガー・フェアラーク東京，2004).

A　2006 年度試験問題（§7 − 9）

下記の (1)〜(4) に答えよ。ただし、解答には根号が含まれてもよい。

（1）極座標表示で表した 3 複素数 $ae^{i\alpha}$、$be^{i\beta}$、$ce^{i\gamma}$ の和を

$$de^{i\delta} = ae^{i\alpha} + be^{i\beta} + ce^{i\gamma} \tag{127}$$

と表したとき、和の絶対値 $d\ (>0)$ を求めよ。

（2）振幅が等しく位相の異なる三つの複素電圧

$$V_1(t) = Ve^{i\omega t}, \quad V_2(t) = Ve^{i(\omega t+\phi)}, \quad V_3(t) = Ve^{i(\omega t+\psi)} \tag{128}$$

の和が 0 になった。ここで、位相の範囲は $0 \le \phi < \psi \le 2\pi$ である。

$$V_2(t) = pV_1(t), \quad V_3(t) = qV_1(t) \tag{129}$$

[15] バネばかりではどのようなバネが用いられるであろうか。抵抗が小さいと、物体をのせた後、針が揺れ続けて重さが量りにくい。一方、抵抗が大きい場合、動きが緩慢で正しい目盛り（平衡点）にたどり着くまでに時間がかかる。すなわち、速く動くが振動が起こらないバネが理想である。そこで振動しなくなる最小の γ は、臨界値、すなわち判別式が 0 の場合 $(\omega_0^2 - \gamma^2/4 = 0)$ である。これを臨界減衰という。これが針がもっとも速く平衡点に達する場合であり、計器の指針などは臨界減衰になるように調整する。この場合の一般解は自明でない。一般解を調べてみよ。

と表したとき、p、q を求めよ。

（３）上の問題で、複素電圧 $V_1(t) - V_3(t)$ を簡単な複素電圧の形で表せ。

（４）

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0 \tag{130}$$

を満たす $z = e^{i\theta}$ がある。$\cos\theta$ を具体的に求めよ。

解答と解説

(1)

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta) + 2bc\cos(\beta - \gamma) + 2ca\cos(\gamma - \alpha)} \tag{131}$$

複素数の絶対値を求める問題である。§8.3 の複素数の和 $ae^{i\alpha} + be^{i\beta}$ の計算を 3 項にした応用問題とも言える。

$$d^2 = de^{i\delta}de^{-i\delta} = (ae^{i\alpha} + be^{i\beta} + ce^{i\gamma})(ae^{-i\alpha} + be^{-i\beta} + ce^{-i\gamma})$$

の展開は 9 項になるが、そのうち 6 項から cos の項が生ずる。これが標準的解法である。

■補足

- $c = 0$ のときに§8.3 の計算に一致しない解答は間違っている。
- 学生の多くは a, b, c, α, β, γ が対称でサイクリックの並べた美しい書き方をしていたので、高校教育の成果であると感じた。
- ２数の演算を繰り返し用いた学生は，矢尽き刀折れ討ち死にした場合が多かった。それでも無理にでも計算したいなら

$$ae^{i\alpha} + be^{i\beta} = fe^{i\phi} \tag{132}$$

とおくと、求める複素数の絶対値は２項の和の結果

$$f = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)} \quad \cos\gamma = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{f} \quad \sin\gamma = \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{f}$$

を利用して、以下のごとく計算する。

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{f^2 + c^2 + 2fc\cos(\phi - \gamma)} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta) + 2fc\cos(\phi - \gamma)} \\
2fc\cos(\phi - \gamma) &= 2fc(\cos\phi\cos\gamma + \sin\phi\sin\gamma) \\
&= 2c[(a\cos\alpha + b\cos\beta)\cos\gamma + (a\sin\alpha + b\sin\beta)\sin\gamma)] \\
&= 2c[a(\cos\alpha\cos\gamma + a\sin\alpha\sin\gamma) + b(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma)] \\
&= 2ca\cos(\gamma - \alpha) + 2bc\cos(\beta - \gamma)
\end{aligned}$$

§7.1 でも述べたように、三角関数に持ち込むと大変になることが、この例でも示されたわけである。a, b, c に関する対称性を壊した計算の代償でもある。ちょっと生真面目な諸君は与えられた試験時間中にこれを乗り切る力量はなかったと見える。

（２）

$$p = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad q = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \tag{133}$$

[図形的解法] 複素平面でのベクトルの和という感覚があれば

$$1 + p + q = 0 \tag{134}$$

から 1、p、q は 120° おきの長さ 1 のベクトルとわかる。これらは 1 の 3 乗根である（オイラーの発見した 3 乗根自体は§7.3 で学習した)。ベキ乗根は§9.3 で勉強したが、その図形的解釈を理解していれば、計算するまでもない。ちなみに問題に与えられた交流を三相交流という。

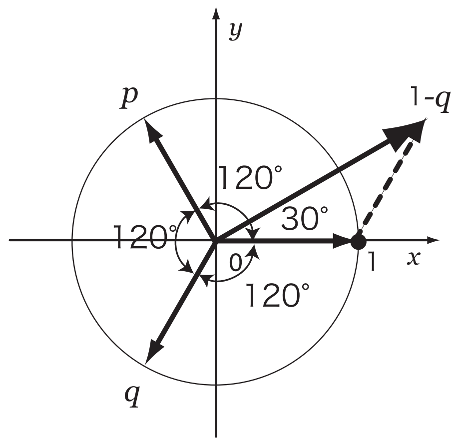

図 9: 和が 0 になる振幅が等しく位相の異なる三つの複素電圧（三相交流電圧)。

[別解法] 式 (134) の虚部を考えると、Im(p)=-Im(q) である。これと p、q の絶対値がともに 1、および式 (134) の実部から、Re(p)=Re(q)$= -1/2$ でなければならない。したがって虚部は $\pm\sqrt{1-(-1/2)^2} = \pm\sqrt{3}/2$ となる。実際の解答用紙には、$p = e^{i\phi}$、$q = e^{i\psi}$ とだけ書いた解答が多かった。

（3）

$$1 - q = \frac{3+\sqrt{3}i}{2} = \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \tag{135}$$

であるから

$$V_1(t) - V_3(t) = \sqrt{3}Ve^{i(\omega t + \frac{\pi}{6})}。 \tag{136}$$

これもまた図のようにベクトル算と考えると容易である。このように三相交流の 2 つを選ぶと振幅が $\sqrt{3}$ 倍の交流が得られることが知られている。

$$1 - e^{i\psi} = -e^{i\psi/2}(e^{i\psi/2} - e^{-i\psi/2}) = 2\sin(\psi/2)e^{i(\psi-\pi)/2} \tag{137}$$

のような変形も OK.

（4）

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}。 \tag{138}$$

[解法 1] $z \neq 0$ だから z^3 で割って

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 = 0 \tag{139}$$

である。§9.2 の計算より

$$\begin{aligned}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1 &= 2\cos 2\theta+2\cos\theta+1\\ &= 4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0\end{aligned}$$

または

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)+z^2+2+\frac{1}{z^2}-1=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$$

２次方程式 $4x^2+2x-1=0$ を解けばよい。

[解法２] $z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$ を $z\neq 0$ で割った $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ を与式から引いて $z^5=1$ を得る。先にも示した図 9 の 1 の 5 乗根（$z^5=1$）を考えよう。1 以外の 1 つのベクトルを z に選べば，z^2、z^3、z^4 はクルクルと回転して，それ以外の 3 つのベクトルとなるし，どれを選んでも $z^5=1$ となる。そこでベクトルの和は下図の 5 本のベクトルであって $z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$ となっている。５乗根はプリントに与えた。解答の数値の絶対値がいわゆる黄金比 1.618…、または 1/黄金比 0.618…の半分であることも申し添えよう。黄金比については小説または映画「ダ・ビンチ・コード」。。。

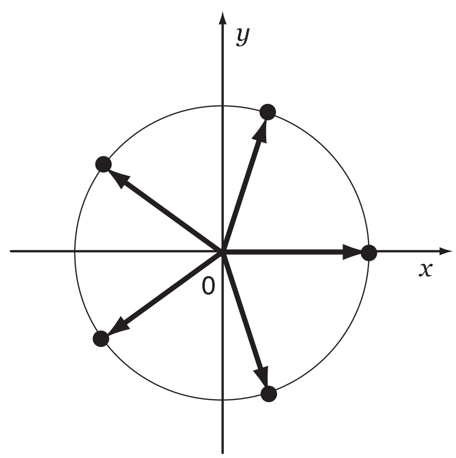

図 10: - 2006 年、博士に始まりダビンチに終わる -

B　2007年度試験問題（§7－9）

（1）下記の問題に答えよ。

(1-1) e^x、$\sin x$、$\cos x$ を、$x=0$ のまわりの展開の最初の4項まで示せ。

(1-2) 上で書いた三角関数の展開式に、形式的に $x=bi$ を代入することによって次式を示せ。

$$\cos(bi)=\frac{e^b+e^{-b}}{2},\quad \sin(bi)=i\frac{e^b-e^{-b}}{2}$$

(1-3) $\sin(\alpha+\beta)$ と $\cos(\alpha+\beta)$ の 加法定理を用いて

$$\sin^2(a+bi)+\cos^2(a+bi)$$

を簡単な形に変形せよ。途中の計算を示すこと。

（2）$[A,B]\equiv AB-BA$ と定義するとき、3×3 行列 $\boldsymbol{S}^x,\boldsymbol{S}^y,\boldsymbol{S}^z$ が

$$[\boldsymbol{S}^x,\boldsymbol{S}^y]=i\boldsymbol{S}^z,\quad [\boldsymbol{S}^y,\boldsymbol{S}^z]=i\boldsymbol{S}^x,\quad [\boldsymbol{S}^z,\boldsymbol{S}^x]=i\boldsymbol{S}^y$$

を満たすとする。以下の $\boldsymbol{S}^x$、$\boldsymbol{S}^z$ を用いて $\boldsymbol{S}^y$ を求めよ。

$$\boldsymbol{S}^x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}^z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

（3）$\sin^9\theta$ を θ の倍数の三角関数で表現せよ。

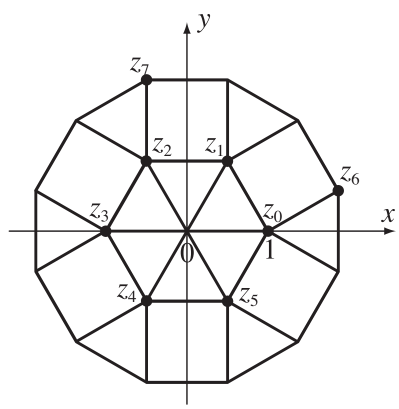

図 11: 複素平面 $z=x+iy$。正方形と正三角形の辺の長さは 1。

（4）複素平面上に辺の長さが1の正三角形と正方形を用いた図形が描いてある。

(4-1) 複素数 z_n $(n=0,1,\cdots,5)$ の値を求め、それらが共通に満たす数式を一つ記せ。

(4-2) $z_7=\alpha z_6$ と書いたとき、α を求めよ。

(4-3) 複素数

$$\left(\frac{z_6}{\sqrt{z_6 z_6^*}}\right)^{12}$$

の値を求めよ。ただし、z^* は複素共役である。途中の計算式または理由を示すこと。

解答と解説

(1-1)

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \\
\sin x &= \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots
\end{aligned}
$$

前半の試験で出題されたが、再度確認の意味もある。３つの関係を覚えることで個々の記憶のあやふやさが訂正されることを期待したい。

(1-2)

$$
\begin{aligned}
e^b &= 1+\frac{b}{1!}+\frac{b^2}{2!}+\frac{b^3}{3!}+\frac{b^4}{4!}+\cdots \\
e^{-b} &= 1-\frac{b}{1!}+\frac{b^2}{2!}-\frac{b^3}{3!}+\frac{b^4}{4!}+\cdots \\
\cos bi &= 1+\frac{b^2}{2!}+\frac{b^4}{4!}+\frac{b^6}{6!}+\cdots=\frac{e^b+e^{-b}}{2} \\
\sin bi &= bi+\frac{b^3 i}{3!}+\frac{b^5 i}{5!}+\frac{b^7 i}{7!}+\cdots \\
&= i\left(b+\frac{b^3}{3!}+\frac{b^5}{5!}+\frac{b^7}{7!}+\cdots\right)=i\frac{e^b-e^{-b}}{2}
\end{aligned}
$$

(1-3)

$$
\begin{aligned}
\sin^2(a+bi)+\cos^2(a+bi) &= (\sin a\cos bi+\cos a\sin bi)^2+(\cos a\cos bi-\sin a\sin bi)^2 \\
&= (\cos^2 a+\sin^2 a)(\cos^2 bi+\sin^2 bi) \\
&= \left[\left(\frac{e^b+e^{-b}}{2}\right)^2+\left(i\frac{e^b-e^{-b}}{2}\right)^2\right]=1
\end{aligned}
$$

授業ではやらなかった三角関数に複素数を代入した場合を検討した。三角関数の２乗の和が１であることは変わらないことを確かめていただいた。

(２)

$$
\boldsymbol{S}^z\boldsymbol{S}^x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{S}^x\boldsymbol{S}^z=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{S}^y=\frac{1}{i}[\boldsymbol{S}^z,\boldsymbol{S}^x]=\frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}
$$

３番めの式を用いればすぐに計算できるのだが、前２つから計算するという厄介な計算法が流布していたようである。友人間で流れる情報はかなり当てにならないというのが小生の学生時代の経験である。自分で考えることを勧める。なお、行列はスピン固有値が１の表現行列である.

スピンや量子力学のことがわからないから、わからないという学生さんたちがいた。もっともなことではある。しかし、単なる複素数の計算問題と考えればなんてことはない計算である。ここではそれ以上わからなくてもよい。わかってほしいのは複素数が自然現象に関わっているという事実と，どうせ計算をやるなら意味のない計算問題より美しい式がよい！　さらに言葉を継げば、その美しさは自然法則が選んでいるもの！

（３）テキストの処方にしたがって、9 乗の計算は

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$

を考えて

$$\begin{aligned}
\sin^9\theta &= \frac{1}{(2i)^9}\left(z-\frac{1}{z}\right)^9 \\
&= \frac{1}{256\times 2i}\left[\left(z^9-\frac{1}{z^9}\right)-9\left(z^7-\frac{1}{z^7}\right)+36\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)-84\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+126\left(z-\frac{1}{z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{256}[\sin(9\theta)-9\sin(7\theta)+36\sin(5\theta)-84\sin(3\theta)+126\sin\theta]
\end{aligned}$$

のように計算される。cos より難しいので出題したのだが、案の定、$2i$ の扱いでミスをして全体の符号を誤ったり、答えにマイナスがない人も多かった。

（４）(4-1) $x+yi$ の形で書けば

$$\begin{gathered}
z_0 = 1,\quad z_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \\
z_3 = -1,\quad z_4 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_5 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,
\end{gathered}$$

となるが、複素数 $z_n \quad (n=0,1,\cdots,5)$ は 1 の 6 乗根である。したがって

$$\begin{aligned}
z_n &= \exp\left[\frac{2\pi n}{6}i\right],\quad (n=0,1,\cdots,5) \\
z_n^6 &= 1
\end{aligned}$$

となる。

(4-2) [解法 1]　外側の多角形が正 12 角形であることは、辺の長さと内角が 150 度であることから明らかである。そのことを考えると、z_7 の頂点は、z_6 を原点を中心に 90 度回した点であることがすぐにわかる。複素平面での 90 度回転は i で表されるので、計算しなくとも $\alpha = i$ がわかる。

[解法 2]　$z_6 = 1+\exp(\pi i/6)$、$z_7 = i+\exp(2\pi i/3)$ であるから

$$\alpha = \frac{i+\exp(2\pi i/3)}{1+\exp(\pi i/6)} = \frac{i+\exp(\pi i/2)\exp(\pi i/6)}{1+\exp(\pi i/6)} = i$$

(4-3) [解法 1]　外側の多角形が正 12 角形であることから、$z_6 = |z_6|\exp(\pi i/12)$ を見抜く。($|z_6| = \sqrt{z_6 z_6^*}$ であることは言うまでもない。) すると即座に答え $[\exp(\pi i/12)]^{12} = \exp(\pi i) = -1$ を得る。

[解法 2]　答えを知っている小生は

$$\begin{aligned}
z_6 &= 1+\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right) = \left[\exp\left(\frac{-\pi i}{12}\right)+\exp\left(\frac{\pi i}{12}\right)\right]\exp\left(\frac{\pi i}{12}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{12}\right) = |z_6|\exp\left(\frac{\pi i}{12}\right)
\end{aligned}$$

と変形できる。したがって、与式の値は $[\exp(\pi i/12)]^{12} = \exp(\pi i) = -1$ である。

[解法 3]　以下のように

$$\left(\frac{z_6}{\sqrt{z_6 z_6^*}}\right)^2 = \left(\frac{z_6}{z_6^*}\right) = \frac{1+\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)}{1+\exp\left(\frac{-\pi i}{6}\right)} = \frac{\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)}{\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)} \times \frac{1+\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)}{1+\exp\left(\frac{-\pi i}{6}\right)} = \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)$$

と変形するのもスマートな解法である。一般に z/z^* は z の偏角の 2 倍の回転操作に対応した複素数である。

多くの諸君がしたように、指数関数を三角関数に直した後、根号の混じった計算に持ち込むことは勧められない。間違いやすい計算にはまるからである。この講義では、複素数の利用によって計算が簡単になることを示してきたはずである。なお、図 11 は筆者らが発見した高分子準結晶（プラスティックモザイク）に現れる図形というのが種明かし。

■基礎力、計算力、応用力のすべてを試す試験問題となったが、問題数が多いにも関わらず予想以上の成績で、優秀な諸君が多いことが実感できた。どの問題の計算もそうであるが、計算のコツをつかむと速いし間違わない。やみくもに計算するのではなくて、アイデアある学生であってほしい。

C　2008 年度試験問題（§7 − 9）

（1）つぎの複素数 z について下記の問に答えよ。結果のみ記すこと。

$$z = (4-3i)^2 - |12+5i| - 2 + 32i$$

(1-1) 実部 $\mathrm{Re}(z)$ を記せ。
(1-2) 虚部 $\mathrm{Im}(z)$ を記せ。
(1-3) 複素共役 z^* を記せ。

（2）$z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ として、下記の問に答えよ。結果のみ記すこと。
(2-1) $|z|$ を記せ。
(2-2) z を指数表示 $re^{i\theta}$（$r > 0$）の形で表せ。
(2-3) 3 乗根を 3 つとも記せ。

（3）$a = 0.1$ kg、$b = 0.2$ kgs^{-1}、$c = 1.0$ kg s^{-2} のとき微分方程式

$$a\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cx = 0$$

について以下の問に答えよ。
(3-1) 一般解を求めよ。途中の計算を示すこと。
(3-2) 初期条件 $t = 0$ で $x = 1$ m、$v = 0$ ms^{-1} のときの概略図を描いてみよ。

（4）磁場（磁束密度 B）中の電荷 q、質量 m の粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ を持つとき、粒子にはローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

が働く。このとき、粒子が回転運動（サイクロトロン運動）をすることを複素数を使って確かめてみよう。以下，$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$、$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, 0)$、$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ とする。

（4-1）$z = v_x + iv_y$ と置いたとき、運動方程式 $F_x = m\dot{v_x}$、$F_y = m\dot{v_y}$ は

$$m\dot{z} = ?$$

の形で表せる。右辺を z、B、q を用いた数式で表せ。

（4-2）上で得られた $z(t)$ の微分方程式を解け。ただし、サイクロトロン角振動数を

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

とおいてよい。

（4-3）z の実部と虚部から、$x(t)$ と $y(t)$ の解を求めよ。

解答と解説

(1) $z = -8 + 8i$ だから

（1-1）$\mathrm{Re}(z) = -8$（1-2）$\mathrm{Im}(z) = 8$（1-3）$z^* = -8 - 8i$.

なお，$\mathrm{Im}(z) = 8i$ と書く人も多かったが，定義から言えば i はないので注意したい．

(2-1) $|z| = \sqrt(zz*) = (-\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = \sqrt(2+2) = 2$.

(2-2) $z = 2e^{i\frac{5}{4}\pi}$．または $z = 2e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

(2-3) $z^{1/3} = 2^{1/3}e^{i\frac{5}{12}\pi}$，$2^{1/3}e^{i\frac{13}{12}\pi}$，$2^{1/3}e^{i\frac{7}{4}\pi}$．または $z^{1/3} = 2^{1/3}e^{-i\frac{1}{4}\pi}$，$2^{1/3}e^{-i\frac{11}{12}\pi}$，$2^{1/3}e^{-i\frac{19}{12}\pi}$.

(3-1) 解として $x(t) = Ae^{\omega t}$ を代入して

$$aA\omega^2 e^{\omega t} + bA\omega e^{\omega t} + cAe^{\omega t} = Ae^{\omega t}(a\omega^2 + b\omega + c) = 0$$

を得る。特性方程式 $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ を解くと $\omega = -1.0 \pm 3.0i$ となる。一般解は

$$x(t) \quad = \quad \exp(-1.0t)[A\sin(3.0t) + B\cos(3.0t)]$$

である．

(3-2) 速度は

$$\begin{aligned} v(t) \quad &= \quad -\exp(-1.0t)[A\sin(3.0t) + B\cos(3.0t)] \\ &\quad\quad +\exp(-1.0t)[3.0A\cos(3.0t) - 3.0B\sin(3.0t)] \end{aligned}$$

と計算される．初期値

$$x(0) = B = 1, \quad v(0) = -B + 3A = 0$$

から

$$x(t) \quad = \quad \exp(-1.0t)\left[\frac{\sin(3.0t)}{3} + \cos(3.0t)\right]$$

と書ける．

(4-1) ローレンツ力は $(F_x, F_y, F_z) = (qv_yB, -qv_xB, 0)$ である。運動方程式は

$$\begin{aligned} m\dot{z} \quad &= \quad m(\dot{v_x} + i\dot{v_y}) = F_x + iF_y = qB(v_y - iv_x) \\ &= \quad -iqB(v_x + iv_y) = -iqBz \end{aligned}$$

である．結局

$$\dot{z} = -\frac{qB}{m}iz = -i\omega z$$

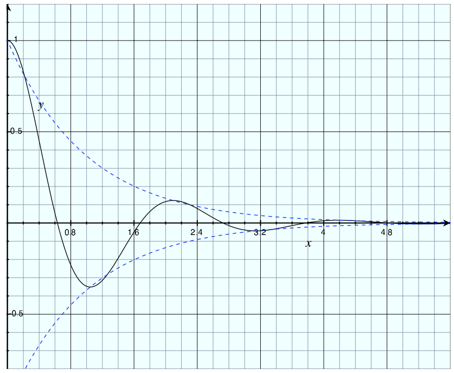

図 12: 問題の解答。$x(t) = \exp(-1.0t)\left[\frac{\sin(3.0t)}{3} + \cos(3.0t)\right]$（実線）および $x(t) = \pm 0.1\exp(-1.0t)$（破線）。

となる。
(4-2) 微分方程式の解は A を定数として

$$z(t) = A\exp(-i\omega t)$$

となる。
(4-3) $A = ve^{-i\theta}$ （$v > 0$），位相を θ として，実部と虚部から

$$v_x(t) = v\cos(\omega t + \theta), \quad v_y(t) = -v\sin(\omega t + \theta)$$

となる。v は速さである．積分して

$$x(t) = R\sin(\omega t + \theta) + x_0, \quad y(t) = R\cos(\omega t + \theta) + y_0$$

を得る。ただし，(x_0, y_0) は円運動の中心，半径は

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{vm}{qB}$$

である。

■宿題をこなしていれば必ずできる点取り問題と，授業の前半で学習した微分方程式，授業の最後で学習したベクトルの外積の例であるローレンツ力を扱った総合問題を出題した．最後の問題は，複素数を利用するとうまく解ける例でもある．複素数を学習する理由がよりよく理解できたのではなかろうか．